جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

پاسخ تمرین سری هفتم | عنوان تمرین | تاریخ تحویل:

۱. حل :

الف) غلط. مجموع هر دو ماتریس hermitian حتما برابر با یک ماتریس hermitian است.

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = \overline{A_{ji}} + \overline{B_{ji}} = \overline{(A+B)_{ji}}$$

ب) غلط. ماتریس S یک ماتریس hermitian است. بنابراین داریم :

$$S = A + iB = (A+iB)^H = A^T - iB^T$$

همان‌طور که میبینیم ماتریس A یک ماتریس متقارن است، اما ماتریس B متقارن نیست.

پ) درست. ماتریس‌های D و E را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$E = \frac{C+C^H}{۲}, D = \frac{C-C^H}{۲i}$$

حال اثبات می‌کنیم که ماتریس‌های B و C هر دو hermitian هستند.

$$E^H = (\frac{C+C^H}{۲})^H = \frac{C^H+(C^H)^H}{۲} = \frac{C+C^H}{۲} = E$$
$$D^H = (\frac{C-C^H}{۲i})^H = \frac{C^H-(C^H)^H}{-۲i} = \frac{C^H-C}{-۲i} = \frac{C-C^H}{۲i} = D$$

و در نهایت داریم $C = E + iD$

۲. الف) داریم :

$$\|Ux\|^۲ = x^*U^*Ux = x^*x = \|x\|^۲ \quad \forall x \in \mathbb{C}^۲$$

ب) برای اثبات، معادله‌ای که در قسمت قبل به دست آورده‌ایم را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن خواسته‌ی سوال را اثبات می‌کنیم. ابتدا $x = e_i$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای هر i داریم $u_i{}^*u_i = ۱$. سپس $x = e_j + e_k$ برای $j \neq k$ آنگاه داریم $۲Re(u_j{}^*u_k) = u_j{}^*u_k + u_k{}^*u_j = ۰$. سپس $x = e_j + ie_k$ برای هر $j \neq k$ در نظر می‌گیریم. داریم $۲Im(u_j{}^*u_k) = ۰$ پس $u_j{}^*u_k = ۰$. پس ماتریس U یک ماتریس واحد است.

۳. الف) ماتریس A یک ماتریس hermitian و ماتریس B یک ماتریس skew-hermitian است.

ب) مقدار هر دو طرف تساوی را جدا جدا به دست می‌آوریم و میبینیم که این دو ماتریس با هم برابر می‌شوند.

پ) فرض می‌کنیم A یک ماتریس hermition و B یک ماتریس skew-hermitian با ابعاد $n \times n$ هستند.

$$\overline{a_{kj}} = a_{jk}, \quad \overline{b_{kj}} = -b_{jk}$$

از دو خاصیت بالا استفاده می‌کنیم و خواسته‌ی سوال را اثبات می‌کنیم. درایه‌ی سطر k و ستون j j ماتریس BA را c_{kj} در نظر می‌گیریم. داریم :

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \Rightarrow \quad \overline{c_{jk}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{ji}}\,\overline{a_{ik}}$$

با توجه به دو خاصیتی که در ابتدا مطرح کردیم، درمی‌یابیم که درایه‌ی سطر K و ستون j، به صورت زیر است :

$$\sum_{i=1}^{n} -b_{ij} a_{ki} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ij}$$

که برابر با درایه‌ی سطر k ستون j ماتریس AB- است.

۴. الف) ماتریس فوریه با $n = 4$ به صورت زیر است که در آن داریم $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}}$

$$F_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{pmatrix}$$

پس

$$F_4 c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ب) ماتریس $F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}$ و ماتریس $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ شامل دو ریشه‌ی اول ریشه‌های چهارم ۱ و ماتریس $-D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ شامل دو ریشه ی دوم ریشه‌های چهارم ۱ هستند.

برای ماتریس P که یک ماتریس جایگشت است داریم :

$$P \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۵. ابتدا صفحات $x_1 = 4$ ، $x_1 + 2x_3 = 8$ و $3x_2 + x_3 = 6$ را رسم می‌کنیم. جسم سه‌بعدی به‌وجود آمده در ناحیه $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ دارای رئوس $(2,0,0)$ $(0,0,0)$ $(0,2,0)$ $(2,2,0)$ $(2,0,3)$ $(0,\frac{2}{3},4)$ $(2,1,3)$ $(4,0,0)$ که با امتحان کردن این نقاط برای تابع هدف متوجه می‌شویم که نقطه $(2,1,3)$ مقدار تابع هدف را ماکسیمم یعنی برابر با ۱۶ می‌کند.

۶. پاسخ این سوال را می‌توانید در این لینک مشاهده کنید.